جبر و احتمال — سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

۱- با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ باشد.

۲- به روش استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $(1+\sqrt{7})^n \geq 1+\sqrt{7}n$

۳- آیا حاصل ضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است؟ چرا؟

۴- اگر n^3 مضرب ۵ باشد ، نشان دهید n نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)

۵- ۹ نقطه درون دایره ای به شعاع واحد انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از واحد دارند.

۶- با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید:

$$(A-C)-(B-C)=(A-B)-C$$

۷- x,y را چنان بیابید تا دو زوج مرتب $(125,2^{3x+y})$ و $(64,5^{3y})$ مساوی باشند.

۸- اگر $A=\{x \mid x^2-5x+4=0\}$ و $B=\{0,1,2\}$ دو مجموعه باشند:

الف) مجموعه های A^2 و B^2 را به صورت اعضا بنویسید.

ب) مجموعه B^2-A^2 را تشکیل دهید.

۹- رابطه R در Z^2 به صورت زیر تعریف شده است:

$$(x,y)R(z,t) \Leftrightarrow x^2-y=z^2-t$$

الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است.

ب) کلاس هم ارزی $[(1,2)]$ را تشکیل دهید.

۱۰- ارقام ۵,۳,۰,۹ را درنظر بگیرید. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد.

ب) پیشامد A آن که اعداد دورقمی مضرب ۵ باشد.

ج) پیشامد B آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.

د) پیشامد $A \cap B'$

۱۱- خانواده ای ۶ فرزند دارد. احتمال آن را بیابید که دو فرزند خانواده ، پسر باشد.

۱۲- در فضای نمونه ای $A=\{a,b,c,d\}$ داریم: $P\{a,d\}=\frac{5}{7}$ و $P\{a,b,c\}=\frac{17}{35}$ و b و c هم شانس هستند ، احتمال هر یک را بیابید.

۱۳- از میان ۵ پیچ و ۷ مهره که درون جعبه ای قرار دارند ۴ تای آنها را به تصادف خارج کرده ایم ، احتمال آن را بیابید که دو جفت پیچ و مهره داشته باشیم.

۱۴- اگر A و B دو پیشامد باشند و داشته باشیم : $P(A)=2P(B)=3P(A \cap B)$ ، مطلوب است محاسبه:

$$\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$$

۱۵- نقطه ای به تصادف درون متوازی الاضلاعی به رئوس $A\begin{vmatrix}0\\3\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\5\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}5\\5\end{vmatrix}$ و $D\begin{vmatrix}4\\3\end{vmatrix}$ انتخاب می کنیم ، احتمال آن را بیابید که داشته باشیم :

$x<1$ یا $x>3/5$

۱۶- برای دو پیشامد A,B از فضای نمونه ای S ثابت کنید:

$$P(A \cap B')=P(A)-P(A \cap B)$$

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

$x = ۲k + ۱ \qquad y = ۲k + ۳ \qquad x + y = ۲K + ۱ + ۲K + ۳ = ۴K + ۴ = ۴(K + ۱) = ۴t$

۲-

به ازای $n = ۱$ برقرار است:

$P(۱) : (۱ + \sqrt{۷})^{۱} \geq ۱ + \sqrt{۷}(۱) \Rightarrow ۱ + \sqrt{۷} \geq ۱ + \sqrt{۷}$

فرض می کنیم به ازای $n = k$ برقرار باشد. باید ثابت کنیم به ازای $n = k + ۱$ نیز برقرار است:

فرض: $P(K) : (۱ + \sqrt{۷})^{K} \geq ۱ + \sqrt{۷}K$

حکم : $P(K + ۱) : (۱ + \sqrt{۷})^{K+۱} \geq ۱ + \sqrt{۷}(K + ۱)$

$(۱ + \sqrt{۷})^{K+۱} \geq (۱ + \sqrt{۷}K)(۱ + \sqrt{۷}) \Rightarrow (۱ + \sqrt{۷})^{K+۱} \geq ۱ + \sqrt{۷}(k + ۱) + ۷k$

بدیهی است که $۷k > ۰$ ، بنابراین : $P(K + ۱)$ برقرار است: $(۱ + \sqrt{۷})^{K+۱} \geq ۱ + \sqrt{۷}(K + ۱)$

۳- خیر. ضرب دو عدد ممکن است گویا شود.

$\sqrt{۵} \times ۲\sqrt{۵} = ۱۰$

۴- فرض می کنیم n، مضرب ۵ نیست :

$n = ۵k + r,\ r \in \{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow n^{۳} = ۱۲۵k^{۳} + ۷۵k^{۲}r + ۱۵kr^{۲} + r^{۳}, r^{۳} \in \{۱,۸,۲۷,۶۴\}$

$\Rightarrow n^{۳} = ۵\underbrace{(۵k^{۳} + ۱۵k^{۲}r + ۳kr^{۲})}_{k'} + r^{۳} = ۵k' + r^{۳}$

هیچ یک از اعداد ۱ ، ۸ ، ۷ و ۶۴ مضرب ۵ نیست ، پس $n^{۳}$ مضربی از ۵ نیست.

۵- دایره را به هشت قطاع مساوی قسمت می کنیم.

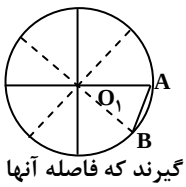
$\hat{O}_{۱} = \frac{۳۶۰}{۸} = ۴۵^{\circ}$

$\hat{A} = \frac{۱۸۰ - ۴۵}{۲} = ۶۷/۵ \Rightarrow \hat{A} > \hat{O}_{۱} \Rightarrow$ در هر مثلث ضلع روبرو به زاویه بزرگ تر ، بزرگ تر است از ضلع روبرو به زاویه کوچک تر $OB = OA > AB$

لانه $n = ۸$

کبوتر $m = ۹$

$۹ > ۸$



بنابر اصل لانه کبوتری ، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می گیرند که فاصله آنها از $OA = ۱$ کمتر است.

۶-

$(A - C) - (B - C) = (A \cap C') - (B \cap C') = (A \cap C') \cap (B \cap C')' = (A \cap C') \cap (B' \cup C) = A \cap (C' \cap (B' \cup C))$

$= A \cap \big((C' \cap B') \cup (C' \cap C)\big) = A \cap (C' \cap B') = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$

۷- دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) در صورتی برابرند که $a = c$ و $b = d$ باشد.

$$\begin{cases} ۲^{۳x+y} = ۶۴ \\ ۵^{۳y} = ۱۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲^{۳x+y} = ۲^{۶} \\ ۵^{۳y} = ۵^{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x + y = ۶ \\ ۳y = ۳ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow ۳x + ۱ = ۶ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳} \end{cases}$$

۸-

$x^{۲} - ۵x + ۴ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۱, x = ۴ \qquad A = \{۱,۴\}$

$A^{۲} = \{(۱,۱),(۱,۴),(۴,۱),(۴,۴)\}$

$B^{۲} = \{(۰,۰),(۰,۱),(۰,۲),(۱,۰),(۱,۱),(۱,۲),(۲,۰),(۲,۱),(۲,۲)\}$

$B^{۲} - A^{۲} = \{(۰,۰),(۰,۱),(۰,۲),(۱,۰),(۱,۲),(۲,۰),(۲,۱),(۲,۲)\}$

۹- R در صورتی که رابطه هم ارزی است که سه ویژگی بازتابی ، تقارنی و تراگذری را داشته باشد.

بازتابی : $(x,y)R(x,y)\Rightarrow x^۲-y=x^۲-y$

تقارنی: $(x,y)R(z,t)\Rightarrow x^۲-y=z^۲-t=x^۲-y\rightarrow(z,t)R(x,y)$

تراگذری: $\begin{matrix}(x,y)R(z,t)\\(z,t)R(e,f)\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-y=z^۲-t\\z^۲-t=e^۲-f\end{cases}\Rightarrow x^۲-y=e^۲-f\rightarrow(x,y)R(e,f)$

$(x,y)R(۱,۲)\rightarrow x^۲-y=۱^۲-۲\rightarrow y=x^۲+۱$ پس R یک رابطه هم ارزی است.

۱۰- الف)

$S=\{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰,۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$

ب) اعدادی که به صفر یا ۵ ختم می شوند ، مضرب ۵ هستند.

$A=\{۳۰,۳۵,۵۰,۹۰,۹۵\}$

ج)

$B=\{۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$

د) ابتدا B' را مشخص می کنیم.

$B'=\{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰\}$

$A\cap B'=\{۳۰,۳۵,۵۰\}$

۱۱-

پسر بودن $P(A)=\dfrac{\binom{۶}{۲}}{۲^۶}=\dfrac{۱۵}{۶۴}\quad P=\dfrac{۱}{۲}$

۱۲-

$$\begin{cases}P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱\\P(a)+P(b)+P(c)=\dfrac{۱۷}{۳۵}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱۷}{۳۵}+P(d)=۱\Rightarrow P(d)=۱-\frac{۱۷}{۳۵}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

$$P(a)+P(d)=\frac{۵}{۷}\Rightarrow P(a)=\frac{۵}{۷}-\frac{۱۸}{۳۵}=\frac{۷}{۳۵}=\frac{۱}{۵}$$

$$P(a)+P(b)+P(c)=\frac{۱۷}{۳۵},P(b)=P(c)\Rightarrow\frac{۱}{۵}+۲P(b)=\frac{۱۷}{۳۵}\Rightarrow P(b)=\frac{۱}{۷},P(c)=\frac{۱}{۷}$$

۱۳- جعبه دارای $۱۲=۷+۵$ پیچ و مهره است که ۴ عدد خارج کرده ایم ، بنابراین تعداد عضوهای فضای نمونه ای برابر است با : $\binom{۱۲}{۴}$

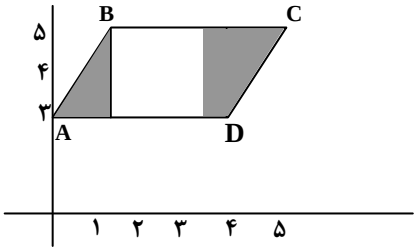
$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۲}}{\binom{۱۲}{۴}}=\frac{۱۰\times۲۱}{۴۹۵}=\frac{۱۴}{۳۳}$$

۱۴- ابتدا $P(A)$ و $P(B)$ را بر حسب $P(A\cap B)$ بدست می آوریم.

$$P(A)=۳P(A\cap B)\ ,\ P(B)=\frac{۳}{۲}P(A\cap B)$$

$$\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{۳P(A\cap B)+\frac{۳}{۲}P(A\cap B)-P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{\frac{۷}{۲}P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{۷}{۲}$$

-۱۵



$x > ۳/۵$ یا $x < ۱$

a_S = مساحت متوازی الاضلاع = قاعده × ارتفاع $= ۴(۵-۳) = ۸$

مساحت مستطیل سفید = طول × عرض $= (۳/۵-۱)\times ۲ = ۵$

a_A = مساحت ناحیه سایه زده شده $(x > ۳/۵$ یا $x < ۱) = ۸-۵ = ۳$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۳}{۸}$$

-۱۶

$(A\cap B')\cap(A\cap B) = A\cap(B'\cap B) = A\cap\varnothing = \varnothing \Rightarrow$ دو پیشامد $A\cap B'$ ، $A\cap B$ جدا از هم هستند

$(A\cap B')\cup(A\cap B) = A\cap(B'\cup B) = A\cap U = A$

$P\left[(A\cap B')\cup(A\cap B)\right] = P(A\cap B') + P(A\cap B) \Rightarrow P(A) = P(A\cap B') + P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$